数理解析研究所講究録
265巻 1976年 89-92

Approximative dimension について

髙村幸男

Approximative dimension および diametral dimension についての基本的な事実は、Bessaga - Pelczynski - Rolewicz の2論文

[1] Approximative dimension of linear topological spaces and some of its applications, Reports of Conference on Functional Analysis, Studia Math. Seria specjalna 1 (1963) 27 - 29

[2] On diametral approximative dimension and linear homogeneity of F-spaces, Bull. Acad. Polon. 9 (1961) 677-683

に述べられているが、ほとんど証明なしなので、あまり理解されていなかったように思われる。実際，核型空間の標準的教科書の

[3] Pietsch, A. Nuclear locally convex spaces, Springer 1972

では未解決とされている。

こゝでは [1], [2] の結果がすべて正しいこと、従って、[3] で提起された問題「Approximative dimension だけを用いて核型空間の理論を組立てられるか？」に答え得ること、を示す。(部分的には Terzioglu, Collectanea Math. XX (1969) 49 — 99, に与えられている)。

以下 E を locally convex linear space とする。

§ 1　記号と定義

$\delta_r(V, U) = \inf\{\delta \mid V \subset \delta U + {}^{\exists}F_r\}$, F_r = r 次元部分空間

$M_\varepsilon(V, U) = \sup\{m \mid {}^{\exists}x_1 \cdots x_m \in V : x_i - x_j \notin \varepsilon U, {}^{\forall}i \neq j\}$

ただし V, U は E の原点の近傍とする.

$\Delta_{\mathfrak{U}}(E) = \{\delta_r \mid {}^{\forall}U, {}^{\exists}V : \delta_r(V, U) \leq \delta_r, r = 1, 2, \cdots\}$

を E の diametral dimension ,

$\Phi_{\mathfrak{U}}(E) = \{\varphi = \varphi(\varepsilon) > 0 \mid {}^{\forall}U, {}^{\exists}V : \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi^{-1} M_\varepsilon(V, U) = 0\}$

を E の approximative dimension という。

$\Delta_{\mathfrak{B}}(E) = \{\delta_r \mid {}^{\forall}A, {}^{\exists}B : \delta_r(A, B) \leq \delta_r, r = 1, 2 \cdots\}$

を E の dual diametral dimension という.

$\Phi_{\mathfrak{B}}(E) = \{\varphi \mid {}^{\forall}A, {}^{\exists}B : \varphi(\varepsilon)^{-1} M_\varepsilon(A, B) \to 0 \text{ as } \varepsilon \downarrow 0\}$

を E の dual approximative dimension という.

ただし A, B は E の bounded set とする。

さらに

$\Delta_{\mathfrak{U}\mathfrak{B}}(E) = \{\delta_r \mid {}^{\forall}A, {}^{\forall}U, \delta_r(A, U) \leq \delta_r \text{ for large } r\}$

を diametral approximative dimension of E という.

§ 2　核型空間の

定理　E : nuclear $\iff$ $[(r+1)^{-\lambda}] \in \Delta_{\mathfrak{U}}(E)$, ${}^{\exists}\lambda > 0$ $({}^{\forall}\lambda > 0)$

$\iff$ $[\exp(\varepsilon^{-\rho})] \in \Phi_{\mathfrak{U}}(E)$, ${}^{\exists}\rho > 0$ $({}^{\forall}\rho > 0)$

§3 部分空間・商空間

$F \subsetneq E$ とする。

1. $\Phi_{\mathfrak{U}}(F) \supset \Phi_{\mathfrak{U}}(E)$
2. $\Phi_{\mathfrak{U}}(E/F) \supset \Phi(E)$
3. $\Delta_{\mathfrak{U}}(E/F) \supset \Delta_{\mathfrak{U}}(E)$
4. E が nuclear ならば $\Delta_{\mathfrak{U}}(F) \supset \Delta_{\mathfrak{U}}(E)$

一般には $\Delta_{\mathfrak{U}}(F) \not\supset \Delta_{\mathfrak{U}}(E)$ も起こると予想される。上の結果と§2の定理を組合せれば、$\Phi_{\mathfrak{U}}$ と $\Delta_{\mathfrak{U}}$ のいずれを用いても、

$$E : \text{nuclear} \Rightarrow F,\ E/F : \text{nuclear}$$

を示し得る。

§4 共役空間

E'_b = E の dual space で strong topology を与えたもの

とする。以下のことが成立する。

1. E : q-tonnelé, nuclear $\Rightarrow$ $\Delta_{\mathfrak{U}}(E) = \Delta_{\mathfrak{B}}(E'_b)$
2. E'_b : nuclear $\Rightarrow$ $\Delta_{\mathfrak{B}}(E) = \Delta_{\mathfrak{U}}(E'_b)$
3. E : q-tonnelé, nuclear $\Rightarrow$ $\Phi_{\mathfrak{U}}(E) = \Phi_{\mathfrak{B}}(E'_b)$
4. E'_b : nuclear $\Rightarrow$ $\Phi_{\mathfrak{B}}(E) = \Phi_{\mathfrak{U}}(E'_b)$

定理　E : $(\mathcal{F})$ or (DF)

$$\Longrightarrow \quad \Delta_{\mathfrak{N}}(E) = \Delta_{\mathfrak{N}\mathfrak{B}}(E) = \Delta_{\mathfrak{B}}(E)$$

$$\Phi_{\mathfrak{N}}(E) = \Phi_{\mathfrak{N}\mathfrak{B}}(E) = \Phi_{\mathfrak{B}}(E) .$$

系.　E : nuclear, (F) or (DF)

$$\Longrightarrow \quad \Delta_{\mathfrak{N}}(E) = \Delta_{\mathfrak{N}}(E_b')$$

$$\Phi_{\mathfrak{N}}(E) = \Phi_{\mathfrak{N}}(E_b')$$

上の系と§2の定理より，$\Delta_{\mathfrak{N}}$ と $\Phi_{\mathfrak{N}}$ のいづれを用いても

$$E : \text{nuclear}, (F) \text{ or } (DF) \Rightarrow E_b' : \text{nuclear}$$

を示すことができる。